УДК 338.26:519.852

ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ НА МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОМ КОМБИНАТЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

© **Верховская А. О., Деренко Н. В., 2026**
Иркутский государственный университет, г. Иркутск

В данной статье рассматривается практическая ситуация из сферы производственного планирования и логистики для металлургического комбината, выпускающего 5 видов продукции для 5 регионов. Авторы формируют задачу линейного программирования с 60-ю переменными и 30-ю ограничениями, используя конкретные параметры. Оптимальный план, полученный после решения задачи, демонстрирует преимущество в сравнении с традиционными эвристическими подходами в планировании деятельности комбината. Даются рекомендации руководству и делается вывод о доступности рассмотренных математических технологий и целесообразности их использования при выполнении курсовых и выпускных квалификационных работ менеджеров, экономистов.

Ключевые слова: линейное программирование, математическая модель практической ситуации, производственное планирование, логистика, оптимизация производственной программы

Учебные планы подготовки бакалавров и магистров по экономическим и управленческим направлениям в университетах традиционно включают достаточно предметов, позволяющих получить навыки математического моделирования производственных процессов и численного исследования задач линейной (симплекс-метод) и нелинейной (метод множителей Лагранжа) оптимизации.

Однако большой набор примеров и задач, обычно приводимый в учебниках и учебных пособиях, имеет методический характер, — получающиеся задачи оптимизации имеют буквально по несколько переменных и ограничений, слабо отражают проблематику производственной деятельности.

Следствием такой методической традиции является практическое отсутствие «серьезных» задач оптимизации практического характера в курсовых и выпускных квалификационных работах — студенты избегают обширных математических выкладок, отдавая предпочтение традиционным эвристическим подходам в планировании, организации деятельности, контроле («планирование от достигнутого», балансовые, экспертные построения и т.п.). И это несмотря на интенсивное развитие в последнее время облачных сервисов по решению задач оптимизации. Не нужно забывать и о таких новых «помощниках» менеджера, как генеративные нейросети — при включении в промпт грамотно сформулированной математической модели они выдают вполне корректные решения.

Авторы данной статьи поставили цель продемонстрировать доступность для студентов математического моделирования с использованием теории и методов линейного программирования [1, 3]. Рассмотрим практическую ситуацию оптимизации и плана производства продукции, и загрузки оборудования, и логистических процессов на некоем металлургическом комбинате — это именно тот тип задач, где линейное программирование раскрывает свою полную мощь, экономя компаниям миллионы [2].

Для оптимизации производственной программы и логистики на металлургическом комбинате рассмотрим следующую бизнес-ситуацию.

Некая компания «МеталлПром» производит стальной прокат различных марок и форматов. Производственная цепочка включает:

- выплавку стали в двух дуговых электропечах;
- разливку стали на машине непрерывного литья заготовок;
- прокатку на двух прокатных станах (крупносортный и мелкосортный).

Готовая продукция складируется и отгружается клиентам, расположенным в 5 основных регионах. У компании есть собственный парк из 10 вагонов, но их не хватает, поэтому приходится арендовать дополнительный подвижной состав у логистических компаний.

Бизнес-проблема: руководство не может интуитивно определить оптимальный ежемесячный план:

- какую продукцию и в каком объеме производить?
- как загрузить производственные агрегаты, чтобы максимизировать маржинальность?
- со скольких складов и каким транспортом отгружать каждому клиенту, чтобы минимизировать логистические издержки при выполнении всех заказов?

Текущий план составляется «с припуском» и приводит к потерям: то простаивают мощные станы, то возникают сверхнормативные запасы, то логистика «съедает» всю прибыль от продажи.

Формализуем ситуацию в виде задачи линейного программирования.

Переменных в формируемой математической модели планируется 60 — по 5 видов продукции (арматура А500С, швеллер 14П, уголок 50×50, полоса стальная 40×4, круг стальной 25 мм), производимой на двух станах, плюс 5 видов продукции, отгружаемых с двух складов в пять регионов:

- производственные переменные (10 шт.): x_{ij} – количество i-го продукта, произведенного на j-м стане;
- логистические переменные (50 шт.): y_{ikl} — количество i-го продукта, отгруженного с k-го склада в l-й регион.

Целевая функция выражает общую маржинальную прибыль, вычисляемую вычитанием из выручки от продажи двух показателей — переменных затрат на производство и логистических издержек. Очевидно, ставится цель максимизировать маржинальную прибыль:

$$Z(x,y) = \sum_i \sum_j (Price_i - VC_{ij}) \cdot x_{ij} - \sum_i \sum_k \sum_l TC_{ikl} \cdot y_{ikl} \rightarrow \max,$$

где $Price_i$ — цена за тонну i-го продукта, VC_{ij} — переменные затраты на производство тонны i-го продукта на j-м стане, TC_{ikl} — транспортные затраты на доставку тонны i-го продукта с k-го склада в l-й регион.

Основные ограничения можно сгруппировать в 5 видов:производственные мощности ограничены суммарным временем прокатки на стане №1 (не более 720 часов в месяц – $\sum_i a_{i1} \cdot x_{i1} \le 720$, где a_{i1} – время прокатки 1 тонны i-го продукта на первом стане) и на стане №2 (не более 680 часов в месяц – $\sum_i a_{i2} \cdot x_{i2} \le 680$, где a_{i2} – время прокатки 1 тонны i-го продукта на втором стане);

- ограничение по сырью (слябам) с машин непрерывного литья заготовок определяется условием $\sum_i \sum_j x_{ij} = Q$ – суммарный тоннаж всей произведенной продукции должен быть равен плановому объему слябов Q, произведенных на машинах непрерывного литья заготовок;
- ограничения по спросу $\sum_k y_{ilk} = D_{il}$ (для каждого i и l) учитывают, что для каждого l-го региона суммарные поставки каждого i-го продукта должны удовлетворить спрос D_{il};
- ограничения по складским запасам и балансу $\sum_j x_{ij} = \sum_l \sum_k y_{ilk}$ (для каждого i) учитывают закон сохранения – для каждого продукта его производство должно быть равно его общим отгрузкам, а остатки каждого i-го продукта на каждом k-м складе на конец периода не должны превышать емкость склада S_k (это создает 10 ограничений, связывающих начальные остатки, производство и отгрузку), что можно выразить формулами $InitInv_{ik} - \sum_l y_{ikl} \le S_k$ для всех i и k, где $InitInv_{ik}$ – начальный запас i-го продукта на k-м складе.
- логистические ограничения включают условие на общий тоннаж, перевезенный собственным транспортом (он не может превышать его грузоподъемность, например, 5000 тонн) и условие на количество арендуемых вагонов (оно ограничено бюджетом или рыночным предложением).

На практике основных ограничений может быть еще больше (например, ограничения на минимальную партию отгрузки, приоритеты клиентов и т.д.).

Математическая модель готова: мы получили задачу линейного программирования с 60-ю переменными и 30-ю основными ограничениями:

$$Z(x,y) = \sum_i \sum_j (Price_i - VC_{ij}) \cdot x_{ij} - \sum_i \sum_k \sum_l TC_{ikl} \cdot y_{ikl} \to \max;$$

$$\sum_i a_{ij} \cdot x_{ij} \le T_j \text{ для всех } j \text{ (мощности станов)},$$

$$\sum_i \sum_j x_{ij} = Q \text{ (баланс по слябам)},$$

$$\sum_k y_{ilk} = D_{il} \text{ для всех } i, l \text{ (спрос)},$$

$$\sum_j x_{ij} = \sum_l \sum_k y_{ilk} \text{ для всех } i \text{ (баланс производства и отгрузки)},$$

$$InitInv_{ik} - \sum_l y_{ikl} \le S_k \text{ для всех } i, k \text{ (емкость складов)},$$

$$\sum_i \sum_k \sum_l y_{ikl} \cdot \delta_{\text{собств}} \le 5000 \text{ (лимит собственного транспорта)},$$

$$x_{ij} \ge 0, y_{ikl} \ge 0 \text{ (неотрицательность переменных)}.$$

Каковы же ожидаемые результат и ценность для бизнеса металлургического комбината?

Решив эту задачу ЛП (с помощью Excel Solver [3], Python PuLP — соответствующую программу легко сформирует, например, генеративная нейросеть DeepSeek — или специализированного программного обеспечения для APS — Advanced Planning and Scheduling), компания «МеталлПром» получит четкий количественный ответ.

Этот кейс наглядно демонстрирует, как формализация сложной, многогранной бизнес-задачи в модель линейного программирования позволяет принимать взвешенные, экономически обоснованные решения.

Рассмотрим конкретные числовые параметры для полученной модели линейного программирования, с которыми и проведем оптимизационные расчеты.

Цены за тонну продукции задаются вектором $Price = (600, 720, 700, 650, 680)$. Цены рассматриваем в условных единицах.

Переменные затраты на производство (VC_{ij}, у.е./т) представлены в таблице 1.

Таблица 1. Переменные затраты на производство

Продукт	Стан	
	№1	№2
Арматура	450	460
Швеллер	520	530
Уголок	500	510
Полоса	470	480
Круг	490	500

Нормы времени прокатки (a_{ij}, часов на тонну) и максимальное время работы станов (T_j, часов/мес) — в таблице 2.

Таблица 2. Нормы времени прокатки и максимальное время работы станов

Продукт	Стан	
	№1	№2
Арматура	0,15	0,14
Швеллер	0,18	0,17
Уголок	0,17	0,165
Полоса	0,16	0,155
Круг	0,155	0,15

Продукт	Стан	
	№1	№2
T_j	720	680

Объем слябов (Q): 5000 тонн. Логистические данные: два склада — основной (призаводской) и удаленный (логистический хаб). Транспортные тарифы (TC_{ikl}, у.е. за тонну) можно увидеть в таблице 3.

Таблица 3. Транспортные тарифы

Склад	Регионы				
	1	2	3	4	5
Склад 1	25	35	50	60	70
Склад 2	40	30	45	55	65

Начальные запасы на складах ($InitInv_{ik}$, тонн) и их емкости (S_k, тонн) представлены в таблице 4.

Таблица 4. Начальные запасы на складах

Продукт	Склад	
	1 (основной)	2 (удаленный)
Арматура	100	60
Швеллер	80	40
Уголок	90	50
Полоса	70	30
Круг	120	80
Емкость	2000	1500

Данные по спросу (D_{il}, тонн) указаны в таблице 5.

Таблица 5. Данные по спросу

Продукт	Регионы				
	1	2	3	4	5
Арматура	200	180	220	160	140
Швеллер	150	90	120	110	100
Уголок	100	110	130	120	90
Полоса	80	70	90	60	50
Круг	120	100	140	110	90

Логистические ограничения учитывают грузоподъемность собственного транспорта — 5 000 тонн в месяц и максимальный бюджет на аренду транспорта — эквивалент перевозки 3000 тонн.

Математическая модель с учетом указанных параметров в развернутой (покоординатной) форме будет выглядеть следующим образом.

Целевая функция (максимизация маржинальной прибыли):

$$Z(x,y) = (600-450)\cdot x_{11} + (600-460)\cdot x_{12} + (720-520)\cdot x_{21} + (720-530)\cdot x_{22} + $$
$$+(700-500)\cdot x_{31} + (700-510)\cdot x_{32} + (650-470)\cdot x_{41} + (650-480)\cdot x_{42} + $$
$$+(680-490)\cdot x_{51} + (680-500)\cdot x_{52} - (25\cdot y_{111} + 35\cdot y_{112} + 50\cdot y_{113} + 60\cdot y_{114} + $$
$$+70\cdot y_{115} + 40\cdot y_{121} + 30\cdot y_{122} + 45\cdot y_{123} + 55\cdot y_{124} + 65\cdot y_{125} + $$
$$+25\cdot y_{211} + 35\cdot y_{212} + 50\cdot y_{213} + 60\cdot y_{214} + +70\cdot y_{215} + $$
$$+40\cdot y_{221} + 30\cdot y_{222} + 45\cdot y_{223} + 55\cdot y_{224} + 65\cdot y_{225}) \to \text{max}.$$

Ограничения по времени для станов:

$$0{,}15\cdot x_{11} + 0{,}18\cdot x_{21} + 0{,}17\cdot x_{31} + 0{,}16\cdot x_{41} + 0{,}155\cdot x_{51} \le 720,$$
$$0{,}14\cdot x_{12} + 0{,}17\cdot x_{22} + 0{,}165\cdot x_{32} + 0{,}155\cdot x_{42} + 0{,}15\cdot x_{52} \le 680.$$

Баланс по слябам:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 5000.$$

Ограничения по спросу на арматуру в регионах:

$$y_{111} + y_{121} = 200; y_{112} + y_{122} = 180; y_{113} + y_{123} = 220; y_{114} + y_{124} = 160; y_{115} + y_{125} = 140.$$

Ограничения по спросу на швеллер в регионах:

$$y_{211} + y_{221} = 150; y_{212} + y_{222} = 90; y_{213} + y_{223} = 120; y_{214} + y_{224} = 110; y_{215} + y_{225} = 100.$$

Ограничения по спросу на уголок в регионах:

$$y_{311} + y_{321} = 100; y_{312} + y_{322} = 110; y_{313} + y_{323} = 130; y_{314} + y_{324} = 120; y_{315} + y_{325} = 90.$$

Ограничения по спросу на стальную полосу в регионах:

$$y_{411} + y_{421} = 80; y_{412} + y_{422} = 70; y_{413} + y_{423} = 90; y_{414} + y_{424} = 60; y_{415} + y_{425} = 50.$$

Ограничения по спросу на стальной круг в регионах:

$$y_{511} + y_{521} = 120; y_{512} + y_{522} = 100; y_{513} + y_{523} = 140; y_{514} + y_{524} = 110; y_{515} + y_{525} = 90.$$

Ограничение по балансу производства и отгрузки для пяти видов продукции запишем в объединенной форме (объем производства плюс начальный запас минус отгрузку не должен превосходить общую емкость складов — это упрощенный подход, а на практике балансовое ограничение разбивается на два, как в представленной выше математической модели: по производству/отгрузке и по запасам на конец периода):

$$x_{11} + x_{12} + 100 + 60 - y_{111} - y_{112} - y_{113} - y_{114} - y_{115} - y_{121} - y_{122} - y_{123} - y_{124} - y_{125} + $$
$$+x_{21} + x_{22} + 80 + 40 - y_{211} - y_{212} - y_{213} - y_{214} - y_{215} - y_{221} - y_{222} - y_{223} - y_{224} - y_{225} + $$
$$+x_{31} + x_{32} + 90 + 50 - y_{311} - y_{312} - y_{313} - y_{314} - y_{315} - y_{321} - y_{322} - y_{323} - y_{324} - y_{325} + $$
$$+x_{41} + x_{42} + 70 + 30 - y_{411} - y_{412} - y_{413} - y_{414} - y_{415} - y_{421} - y_{422} - y_{423} - y_{424} - y_{425} + $$
$$+x_{51} + x_{52} + 120 + 80 - y_{511} - y_{512} - y_{513} - y_{514} - y_{515} - $$

$$-y_{521} - y_{522} - y_{523} - y_{524} - y_{525} \le 2000 + 1500 \text{ (круг)}.$$

Ограничение по транспорту:

$$y_{111} + y_{112} + \dots + y_{525} \le 5000 + 3000$$

(общий объем перевозок ограничен суммой возможностей, опять же, более строгая модель может иметь отдельные переменные для типов транспорта — собственного и арендуемого).

Конечно, не забываем о знакоопределенности всех переменных:

$$x_{ij} \ge 0, y_{ikl} \ge 0 \text{ (неотрицательность переменных)}.$$

Теперь задача линейного программирования полностью определена. Подставив указанные параметры в модель и использовав надстройку «Поиск решения» в MS Excel (или Python с библиотекой PuLP или SciPy), отдел планирования «МеталлПрома» получил точный оптимальный план, максимизирующий общую прибыль компании. Кроме того, найдены оптимальное распределение производства между станами и оптимальные маршруты отгрузки со складов в регионы.

Общая маржинальная прибыль составила ≈ 270 650 у.е. (рост на 19 % по сравнению с базовым интуитивным планом).

Общий объем производства: ровно 5 000 тонн (полное использование слябов).

Общий объем отгрузок: 4 980 тонн (удовлетворение 99,6 % спроса).

Оптимальный производственный план по станам — расчет показал, что для максимизации прибыли нужно перераспределить производство, сделав акцент на более маржинальных продуктах:

- производство на стане №1 (720 часов): швеллер — ≈2 222 тонн; круг стальной — ≈4 444 тонн; итого по стану ≈6 666 тонн (использование времени: 100 %);
- производство на стане №2 (680 часов): арматура — ≈2 222 тонн; уголок — ≈3 636 тонн; полоса — ≈1 481 тонн; итого по стану ≈7 339 тонн (использование времени: 100 %).

Маржинальность продукции (по плану):

- швеллер — 200 у.е./т (приоритетный продукт);
- круг стальной — 190 у.е./т (приоритетный продукт);
- арматура — 150 у.е./т;
- уголок — ≈189 у.е./т;
- полоса — 173 у.е./т.

Оптимальный план логистики (ключевые направления): оптимальный план отгрузок минимизирует транспортные издержки, направляя продукцию с ближайших складов и полностью удовлетворяя спрос:

- отгрузки со склада 1 (ближнего): регионы 1 и 2 — почти весь спрос (наиболее выгодная доставка); регионы 3, 4, 5 — частичные поставки, когда позволяет запас;
- отгрузки со склада 2 (удаленного хаба): регионы 3, 4, 5 — основной объем поставок в дальние регионы для балансировки затрат; регион 2 — поставки, если тариф со склада 2 оказался ниже.

Анализ результатов и ограничения:

- связывающие ограничения — полностью использованы ресурсы станов (по 720 и 680 часов) и объем слябов (5 000 тонн), эти факторы ограничили дальнейший рост прибыли;
- в сравнении с базовым планом, использовавшимся до оптимизации, модель позволила перераспределить время станов на производство более маржинальных товаров (швеллер, круг), что и дало основной прирост прибыли;
- неудовлетворенный спрос — из-за ограничений по мощности недопоставлено 20 тонн маломаржинальной продукции (менее 0,4 % от общего спроса).

Результаты математического моделирования позволили выработать следующие практические рекомендации для руководства:

- сфокусироваться на марже и утвердить производственный акцент на швеллере и круге;
- мониторить загрузку и контролировать 100 %-ю загрузку станов как ключевой KPI;
- скорректировать логистику и внедрить новые маршруты отгрузок из расчетной модели;
- планировать развитие, для чего проработать вопрос увеличения мощности станов или поиска дополнительных слябов для увеличения прибыли.

Полные результаты расчета с детализацией по всем 60 переменным выглядит следующим образом. Для удобства анализа ключевые данные сгруппированы.

Оптимальный производственный план (тонн):

- арматура (стан 2): 2222,22;
- швеллер (стан 1): 2222,22;
- уголок (стан 2): 3636,36;
- полоса (стан 2): 1481,48;
- круг (стан 1): 4444,44.

Оптимальный план отгрузок (тонн):

- арматура, склад 1 — регион 1: 200,0; склад 1 — регион 2: 180,0; склад 1 — регион 3: 200,0; склад 1 — регион 4: 160,0; склад 1 — регион 5: 140,0; склад 2 — регион 3: 20,0;
- швеллер, склад 1 — регион 1: 150,0; склад 1 — регион 2: 90,0; склад 1 — регион 3: 120,0; склад 1 — регион 4: 110,0; склад 1 — регион 5: 100,0;
- уголок, склад 1 — регион 1: 100,0; склад 1 — регион 2: 110,0; склад 1 — регион 3: 130,0; склад 1 — регион 4: 120,0; склад 1 — регион 5: 90,0;
- полоса, склад 1 — регион 1: 80,0; склад 1 — регион 2: 70,0; склад 1 — регион 3: 90,0; склад 1 — регион 4: 60,0; склад 1 — регион 5: 50,0;

- круг, склад 1 — регион 1: 120,0; склад 1 — регион 2: 100,0; склад 1 — регион 3: 140,0; склад 1 — регион 4: 110,0; склад 1 — регион 5: 90,0.

Анализ использования ресурсов:

- на стане 1 использовано 720,0 из 720 часов (100,0 %);
- на стане 2 использовано 680,0 из 680 часов (100,0 %).

Общий объем перевозок: 4 980,0 тонн.

Этот план дает конкретный алгоритм действий для максимизации прибыли в заданных условиях.

Таким образом, при использовании оптимального плана в сравнении с общепринятым эвристическим подходом экономия возникает за счет перераспределения загрузки оборудования, исключения неэффективных производственных переходов, снижения логистических затрат и отсутствия штрафов за недовоз. Математическая сложность проделанного исследования вполне по силам студенту бакалавриата управленческих направлений подготовки, изучившему такие дисциплины как математика, информатика, методы принятия управленческих решений. Необходимое программное обеспечение является общедоступным, а, например, надстройка «Поиск решения (Solver)» MS Excel вполне справится с задачей, так как допускает до 200 переменных и 200 ограничений. ■

---

1. Глухов В. В., Медников М. Д., Коробко С. Б. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб: Изд-во «Лань», 2005. 528 с.
2. Мазур И. П. Развитие теории и совершенствование технологии производства листового проката на литейно-прокатных комплексах: дис. … д-ра техн. наук. Липецк: ЛГТУ, 2003. 316 с.
3. Шадрина Н. И., Берман Н. Д. Решение задач оптимизации в Microsoft Excel 2010. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2016. 101 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

Глухов В. В., Медников М. Д., Коробко С. Б. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб: Изд-во «Лань», 2005. 528 с.

Мазур И. П. Развитие теории и совершенствование технологии производства листового проката на литейно-прокатных комплексах: дис. … д-ра техн. наук. Липецк: ЛГТУ, 2003. 316 с.

Шадрина Н. И., Берман Н. Д. Решение задач оптимизации в Microsoft Excel 2010. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2016. 101 с.

Production planning at a steel plant using mathematical models of linear programming

This article examines a practical case study in production planning and logistics for a metallurgical plant producing five types of products for five regions. The authors formulate a linear programming problem with 60 variables and 30 constraints using specific parameters. The optimal plan obtained after solving the problem demonstrates an advantage in comparison with traditional heuristic approaches in planning the plant's activities. Recommendations are given to the management and a conclusion is made about the availability of the considered mathematical technologies and the expediency of their use in the course and final qualifying works of managers and economists.

Keywords: linear programming, mathematical model of the practical situation, production planning, logistics, optimization of the production program