

## ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В РЕИНЖИНИРИНГЕ БИЗНЕСА

© Деренко Н. В., 2026

Иркутский государственный университет, г. Иркутск

В данной статье автор демонстрирует технологию решения и постоптимального параметрического анализа задачи линейного программирования. Возможность оценки устойчивости оптимального плана при варьировании цен и запасов ресурсов, выявление наиболее ценных ресурсов, оценка целесообразности выпуска новой продукции или внедрения новых технологий — важнейшие инструменты реинжиниринга бизнеса. В результате получен вывод: использование стандартного программного обеспечения или облачных инструментов не может заменить аналитической работы с параметрами оптимальных симплекс-таблиц, формулами постоптимального анализа.

*Ключевые слова:* линейное программирование, производственное планирование, реинжиниринг бизнеса, постоптимальный параметрический анализ, устойчивость оптимального плана

Более 85 лет назад появился мощный количественный инструмент исследования операций — модели и методы оптимизации управления и принятия решений, известные сегодня как «линейное программирование» (эффективное планирование при помощи линейных математических моделей).

Его основы заложил Л.В. Канторович в 1939 году публикацией классической работы «Математические методы организации и планирования производства» (в связи с этим Л.В. Канторович в 1975 г. получил Премию памяти А. Нобеля в области экономики «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов»), в которой сформулировал новый класс экстремальных задач с ограничениями и разработал эффективный метод их решения. Уже в 1947–1949 годах Джорж Данциг разработал симплекс-метод — доступный любому специалисту алгоритм решения задач линейного программирования. А если учесть, что специальные задачи линейного программирования — транспортные задачи — решались советскими математиками еще в середине 1920-х годов, то можно говорить о столетнем юбилее данной отрасли науки.

Бизнес остро нуждался в таких количественных методах, поэтому линейное программирование сразу было взято на вооружение операционным и стратегическим менеджментом. Со временем стало ясно, что соответствующие математические модели, включающие не просто задачу оптимизации, а пару взаимно-двойственных задач линейного программирования — поиск субъективно обусловленных оценок бизнеса (интерес бизнесмена) и анализ объективно обусловленных оценок бизнеса (реакция внешней среды на перераспределение ресурсов) — олицетворяют использование настоящего системного мышления, позволяют изучить все «внутренние пружины» экономической ситуации. Постоптимальный параметрический анализ оптимального решения позволяет исследовать устойчивость выработанной стратегии при колебаниях цен, прибыли, запасов ресурсов, технологических показателей — всех параметров модели [1, 3].

С появлением персональных компьютеров и интернета были разработаны многочисленные программные продукты и облачные сервисы (интернет-приложения), позволяющие решать онлайн задачи линейного программирования. Самым популярным инструментом во всем мире стала надстройка «Поиск решения» (Solver) офисного приложения MS Excel. Достаточно

сформировать табличную модель — указать программе значения всех необходимых параметров и ячеек, вычисляющих целевую функцию, значения ограничений, — и «черный ящик» выдаст оптимальный план (при его существовании; к сожалению, один, что неудобно при наличии множества оптимумов) и отчет о его устойчивости (границы допустимого варьирования отдельных коэффициентов целевой функции и запасов ресурсов, здесь же указывается решение двойственной задачи — «теневые цены» ресурсов, те самые объективно обусловленные оценки бизнеса) [1].

И появилась проблема снижения эффективности применения линейного программирования: стало нормой использовать указанный «черный ящик» MS Excel, который не предоставляет менеджеру симплекс-таблиц, столь необходимых при постоптимальном анализе — важнейшего инструмента реинжиниринга бизнеса. Практически все параметры оптимальной симплекс-таблицы необходимы для реагирования на скачки цен и запасов ресурсов, для выявления наиболее ценных ресурсов, для оценки целесообразности выпуска новой продукции или внедрения новых технологий. Ясно, что современный «компьютеризированный» менеджер для ответа на указанные вопросы просто перерешивает задачи линейного программирования, теряя возможность видеть в формулах постоптимального анализа гибкости выбранной стратегии [1, 3].

В данной статье автор демонстрирует на стандартной экономической ситуации, включаемой в обычные учебники по математическим методам или принятию управленческих решений в бизнесе, технологию решения и постоптимального анализа задачи линейного программирования. Грамотный управленец сегодня должен уметь проделывать все выкладки, нельзя гарантировать, что у него всегда будет под рукой персональный компьютер, электричество, интернет.

Рассмотрим производственную деятельность некой пекарни.

В пекарне для выпечки четырех видов хлеба A1, A2, A3, A4 используется мука двух сортов, маргарин и яйца. Имеющееся оборудование, производственные площади и поставки продуктов таковы, что в сутки можно переработать не более 250 кг муки 1-го сорта, 200 кг муки 2-го сорта, 60 кг маргарина и 1500 шт яиц. В таблице 1 приведены нормы расхода перечисленных продуктов на 1 кг хлеба, а также прибыль от реализации 1 кг хлеба каждого вида.

Таблица 1. Экономические параметры пекарни

Наименование продукта	Нормы расхода на 1 кг хлеба каждого вида (кг)			
	A1	A2	A3	A4

Мука 1-го сорта	0,5	0,5	0	0
Мука 2-го сорта	0	0	0,5	0,5
Маргарин	0,125	0	0	0,125
Яйцо (шт)	2	1	1	1
Прибыль (руб. за 1 кг)	140	120	50	60

Определить суточный план выпечки хлеба, максимизирующий прибыль. Ответить на ряд вопросов постоптимального анализа (сформулированы в тексте решения).

Решение. Составим стандартную задачу линейного программирования [2], обозначив сорта хлеба через  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ; преобразуем ее в каноническую [3], добавив слева в основные ограничения дополнительные переменные  $x_5$  — остатки муки 1-го сорта,  $x_6$  — остатки муки 2-го сорта,  $x_7$  — остатки маргарина,  $x_8$  — остатки яиц после реализации выбранного плана производства хлеба:

$$f(x) = 140 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 + 50 \cdot x_3 + 60 \cdot x_4 \rightarrow \max; x \geq 0;$$

$$\begin{cases} 0,5 \cdot x_1 + 0,5 \cdot x_2 + x_5 = 250; \\ 0,5 \cdot x_3 + 0,5 \cdot x_4 + x_6 = 200; \\ 0,125 \cdot x_1 + 0,125 \cdot x_4 + x_7 = 60; \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + x_8 = 1500. \end{cases}$$

В статье будем придерживаться стандартных обозначений параметров задачи линейного программирования [2, 3]:  $c$  — целевой вектор (прибыль каждого вида продукции);  $A$  — технологическая матрица (расход каждого вида сырья на 1 единицу каждого вида продукции);  $b$  — вектор запасов (запасы сырья):

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \max; A \cdot x = b; x \geq 0,$$

где через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначено скалярное произведение векторов.

Решим задачу С-методом в табличной форме. В качестве стартового базисного решения системы уравнений в получившейся задаче выберем очевидный «тест на рентабельность» — исходные переменные равны нулю (в симплекс-методе называются свободными), а дополнительные переменные, являющиеся базисными (они вычислены в системе уравнения после зануления свободных переменных) равны запасам сырья (если данный план с нулевой прибылью окажется наилучшим, то производство нерентабельно):

$$x^I = (0, 0, 0, 0, 250, 200, 60, 1500).$$

Исходная симплекс-таблица представлена в таблице 2: к известным параметрам задачи добавились оценки оптимальности выбранного базисного плана  $\Delta_j = \langle c_{\text{баз}}, A^j \rangle - c_j$  (при их неотрицательности текущий план признается оптимальным, а при наличии отрицательных оценок требуется вычислять новый план, для чего по самой большой по модулю отрицательной оценке выбирается ведущий столбец, соответствующий свободной переменной, вводимой в новый базис) и симплекс-отношения  $Q_i$ , вычисляемые делением на положительные элементы ведущего столбца соответствующих значений базисных координат  $b_i$  (самое маленькое отношение указывает ведущую строку, соответствующую базисной переменной, выводимой из базиса). При отсутствии положительных значений в ведущем столбце (или любом другом столбце с отрицательной оценкой) вычисления останавливаются — задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции  $f(x)$ , так бывает при неудачном моделировании (не все ограничения учтены). На языке «табличной модели» данные рассуждения выглядят легкими для запоминания: «Не можешь выбрать ведущий столбец — задача решена; не можешь выбрать ведущую строку — задача не имеет решения (функция не ограничена)».

Выбранные ведущие столбец и строку в симплекс-таблицах будем выделять жирным шрифтом. На их пересечении стоит ведущий элемент, при помощи которого вычисляется новая таблица, содержащая новый план с замененной одной базисной переменной. Доказано, что за конечное число таблиц задача будет решена (случай закливания расчетов на вырожденных планах с нулевыми базисными координатами крайне редко встречается в практических задачах, в такой ситуации известно, как действовать).

Таблица 2. Исходная симплекс-таблица

$x_{\text{баз}}$	$c_j$	$c_j$								$b_i$	$Q_i$
		140	120	50	60	0	0	0	0		
	$c_{\text{баз}}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$		
$x_5$	0	0,5	0,5	0	0	1	0	0	0	250	$250/0,5 = 500$
$x_6$	0	0	0	0,5	0,5	0	1	0	0	200	—
$x_7$	0	0,125	0	0	0,125	0	0	1	0	60	$60/0,125 = 480$
$x_8$	0	2	1	1	1	0	0	0	1	1500	$1500/2 = 750$
$\Delta_j$		-140	-120	-50	-60	0	0	0	0		$0 = f(x^I)$

В таблице 2 в последней строке есть 4 отрицательные оценки, следовательно, рассматриваемый план не является оптимальным. Ведущий элемент равен 0,125, следовательно,

вместо  $x_7$  в базисе нового вычисляемого в следующей таблице плана будет пока свободная переменная  $x_1$ . Правила формирования новой симплекс-таблицы просты:

- столбцы базисных переменных не вычисляются, а заполняются единичной матрицей (в ячейках с одинаковыми адресами строки и столбца ставится 1, остальные, включая оценку, равны нулю);

- ведущая строка делится почленно на ведущий элемент и заносится в новую таблицу;

- оставшиеся ячейки вычисляются по правилу «прямоугольника», когда выбираются 4 ячейки, являющиеся вершинами прямоугольника, полученного опусканием диагонали из старого значения ячейки к ведущему элементу, и

вычисляется новое значение ячейки — из старого значения вычитается произведение ячеек «другой диагонали», деленное на ведущий элемент. Например, новое значение переменной  $x_5$  вычисляется как

$$250 - \frac{60 \cdot 0,5}{0,125} = 10.$$

Новая симплекс-таблица приведена в таблице 3. В ней вычислен новый план — новое базисное решение системы уравнений  $x^{II} = (480, 0, 0, 0, 10, 200, 0, 540)$  с прибылью 67200.

Таблица 3. Результаты первой итерации симплекс-метода

$x_{\text{баз}}$	$c_j$									bi	$Q_i$
		140	120	50	60	0	0	0	0		
	$c_{\text{баз}}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$		
$x_5$	0	0	0,5	0	-0,5	1	0	-4	0	10	10/0,5 = 20
$x_6$	0	0	0	0,5	0,5	0	1	0	0	200	–
$x_1$	140	1	0	0	1	0	0	8	0	480	–
$x_8$	0	0	1	1	-1	0	0	-16	1	540	540/1 = 540
$\Delta_j$		0	-120	-50	80	0	0	1120	0	67200 = $f(x^{II})$	

Наличие отрицательных оценок в таблице 3 требует вычислить новый план, т.к. текущий является неоптимальным: ведущий столбец  $x_2$ , а ведущая строка  $x_5$ , следовательно, ведущий

элемент равен 0,5. С его помощью вычисляем новый план, представленный в таблице 4.

Таблица 4. Результаты второй итерации симплекс-метода

$x_{\text{баз}}$	$c_j$									bi	$Q_i$
		140	120	50	60	0	0	0	0		
	$c_{\text{баз}}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$		
$x_2$	120	0	1	0	-1	2	0	-8	0	20	–
$x_6$	0	0	0	0,5	0,5	0	1	0	0	200	200/0,5 = 400
$x_1$	140	1	0	0	1	0	0	8	0	480	–
$x_8$	0	0	0	1	0	-2	0	-8	1	520	520/1 = 520
$\Delta_j$		0	0	-50	-40	240	0	160	0	69600 = $f(x^{III})$	

Ясно, что полученный план  $x^{III} = (480, 20, 0, 0, 0, 200, 0, 520)$  с прибылью 69600 не оптимален, так как можно выбрать ведущий

столбец  $x_3$  и ведущую строку  $x_6$ . Ведущий элемент 0,5 приводит к новому, в этот раз оптимальному плану, представленному в таблице 5.

Таблица 5. Результаты третьей итерации симплекс-метода

$x_{\text{баз}}$	$c_j$									bi	
		140	120	50	60	0	0	0	0		
	$c_{\text{баз}}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$		
$x_2$	120	0	1	0	-1	2	0	-8	0	20	
$x_3$	50	0	0	1	1	0	2	0	0	400	
$x_1$	140	1	0	0	1	0	0	8	0	480	
$x_8$	0	0	0	0	-1	-2	-2	-8	1	120	
$\Delta_j$		0	0	0	10	240	100	160	0	89600	

Получена последняя С-таблица с неотрицательными оценками (см. табл. 5), оптимальный план равен  $x^* = (480, 20, 400, 0, 0, 0, 0, 120)$  с максимальным значением целевой функции 89600. Заметим, что в последней строке оптимальной симплекс-таблицы находится оптимальное решение

соответствующей двойственной задачи:  $\min_y z(y) = 89600$ , а двойственные переменные  $y^* = (240, 100, 160, 0, 0, 0, 0, 10)$ .

Проведем анализ полученных результатов.

а) Оптимальный план: максимальная прибыль 89600 руб. достигается при выпуске 480 кг хлеба 1-го вида, 20 кг хлеба 2-го вида, 400 кг хлеба 3-го

вида; хлеб 4-го вида выпускать невыгодно (так как  $x_1^* = 480, x_2^* = 20, x_3^* = 400, x_4^* = 0$ ).

б) Анализ дефицитности сырья [3]: все сырье, кроме яиц, будет дефицитно, так как использовано полностью: его остатки в оптимальном плане  $x_5^* = x_6^* = x_7^* = 0$ , а соответствующие оценки больше нуля. Запас яиц не является дефицитным, так как налицо остатки  $x_8^* = 120$  и соответствующая нулевая оценка. Вклад в прибыль дефицитных муки обоих сортов и маргарина: ценность муки 1-го сорта  $y_1^* = 240$ ; муки 2-го сорта  $y_2^* = 100$ ; маргарина  $y_3^* = 160$ . Наиболее ценная — мука 1-го сорта, при увеличении ее запаса на 1 кг соответствующий новый оптимальный план обеспечит прибыль, большую на 240 руб.:  $89600 + 240 = 89840$  (используем экономический смысл  $y_i^*$  — прирост целевой функции при

увеличении на 1 ед. соответствующего запаса сырья).

в) Исследуем устойчивость оптимального плана по отношению к колебаниям коэффициентов целевой функции [3] — при их изменениях в исходной модели обязательно будет меняться последняя строка оценок в оптимальной симплекс-таблице. Будем считать, что колебаться может только один коэффициент, его прирост —  $\delta c_k$ : измененное значение коэффициента —  $\tilde{c}_k = c_k + \delta c_k$ . Соответствующее исследование для коэффициентов при  $x_1, x_2, x_3$  сводится к решению систем неравенств, формируемых по последней симплекс-таблице (так как  $x_1, x_2, x_3$  — базисные в оптимальном плане), — мы требуем неотрицательности новых оценок (то есть сохранения оптимального плана), пересчитанных с учетом прироста  $\delta c_k$ :

$$\begin{array}{l} \delta c_1 - ? \\ \left\{ \begin{array}{l} 10 + \delta c_1 \cdot 1 \geq 0, \\ 240 + \delta c_1 \cdot 0 \geq 0, \\ 100 + \delta c_1 \cdot 0 \geq 0, \\ 160 + \delta c_1 \cdot 8 \geq 0, \\ \delta c_1 \geq -10 \Rightarrow \\ 130 \leq \tilde{c}_1 \leq \infty. \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \delta c_2 - ? \\ \left\{ \begin{array}{l} 10 + \delta c_2 \cdot (-1) \geq 0, \\ 240 + \delta c_2 \cdot 2 \geq 0, \\ 100 + \delta c_2 \cdot 0 \geq 0, \\ 160 + \delta c_2 \cdot (-8) \geq 0, \\ -120 \leq \delta c_2 \leq 10 \Rightarrow \\ 0 \leq \tilde{c}_2 \leq 130. \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \delta c_3 - ? \\ \left\{ \begin{array}{l} 10 + \delta c_3 \cdot 1 \geq 0, \\ 240 + \delta c_3 \cdot 0 \geq 0, \\ 100 + \delta c_3 \cdot 2 \geq 0, \\ 160 + \delta c_3 \cdot 0 \geq 0, \\ \delta c_3 \geq -10 \Rightarrow \\ 40 \leq \tilde{c}_3 \leq \infty. \end{array} \right. \end{array}$$

Сформировать данные системы неравенств не сложно: пересчитываем оценки свободных переменных в последней симплекс-таблице путем добавления к ним  $\delta c_k$ , умноженных на числа, стоящие над оценками в строке, соответствующей базисной  $x_k$ , и добавляем условие неотрицательности новых оценок.

$x_4$  — небазисный в оптимальной таблице, поэтому  $\delta c_4 \leq 10 \Rightarrow 0 \leq \tilde{c}_4 \leq 70$  [2]. Таким образом, при раздельном колебании  $c_k$  оптимальный план будет неизменным, пока соответствующие изменившиеся коэффициенты будут находиться в найденных выше диапазонах.

г) Если при отдельном колебании  $c_k$  найденные диапазоны будут нарушены, или изменятся сразу несколько коэффициентов целевой функции, следует заменить в последней симплекс-таблице  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  и  $\Delta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  на новые значения и дорешать задачу симплекс-методом, если появятся отрицательные оценки. Например, пусть новые значения будут равны  $c_1 = 120$ ;  $c_2 = 140$ ;  $c_3 = 50$ ;  $c_4 = 80$ . В таблице 6 представлена пересчитанная таблица 5, утерявшая свойство оптимальности, — появились отрицательные оценки (жирным шрифтом выделены пересчитанные параметры).

Таблица 6. Последняя симплекс-таблица с новыми целевыми коэффициентами

$x_{\text{баз}}$	$c_j$ $c_{\text{баз}}$	120	140	50	80	0	0	0	0	bi
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_2$	140	0	1	0	-1	2	0	-8	0	20
$x_3$	50	0	0	1	1	0	2	0	0	400
$x_1$	120	1	0	0	1	0	0	8	0	480
$x_8$	0	0	0	0	-1	-2	-2	-8	1	120
$\Delta_j$		0	0	0	-50	280	100	-160	0	80400

Выбрав ведущий столбец  $x_7$  и ведущую строку  $x_1$  (по описанным выше правилам), получим новую симплекс таблицу с прибылью 90000 и новым  $\tilde{x} = (0, 500, 400, 0, 0, 0, 60, 600)$  (см. табл. 7).

Таблица 7. Пересчитанная симплекс-таблица с новыми целевыми коэффициентами

$x_{\text{баз}}$	$c_j$ $c_{\text{баз}}$	120	140	50	80	0	0	0	0	bi
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_2$	140	1	1	0	0	2	0	0	0	500
$x_3$	50	0	0	1	1	0	2	0	0	400
$x_7$	0	0,125	0	0	0,125	0	0	1	0	60
$x_8$	0	1	0	0	0	-2	-2	0	1	600
$\Delta_j$		20	0	0	-30	280	100	0	0	90000

Из таблицы 7 следует, что требуется еще одна итерация симплекс-метода, так как есть отрицательная оценка. С ведущим элементом 2 получаем оптимальную таблицу 8.

Таблица 8. Оптимальная симплекс-таблица с новыми целевыми коэффициентами

$x_{\text{баз}}$	$c_j$ $c_{\text{баз}}$	120	140	50	80	0	0	0	0	bi
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_2$	140	1	1	0	0	2	0	0	0	500
$x_4$	80	0	0	1	1	0	2	0	0	400
$x_7$	0	0,125	0	-0,125	0	0	0,25	1	0	10
$x_8$	0	1	0	0	0	-2	-2	0	1	600
$\Delta_j$		20	0	30	0	280	160	0	0	102000

Новая стратегия может оказаться привлекательной по сравнению с исходной, если менеджер посчитает, что выгодность к выпуску всего двух видов хлеба (второй — 500 кг и четвертый — 400 кг) с остатками маргарина и большого количества яиц (10 кг маргарина 600 яиц) его устраивает. Ясно, что выросшая почти на 14 % прибыль размером в 102000 руб. говорит в пользу нового оптимального плана.

$$\begin{cases} \delta b_1 - ? \\ 20 + \delta b_1 \cdot 2 \geq 0, \\ 400 + \delta b_1 \cdot 0 \geq 0, \\ 480 + \delta b_1 \cdot 0 \geq 0, \\ 120 + \delta b_1 \cdot (-2) \geq 0, \\ -10 \leq \delta b_1 \leq 60 \Rightarrow \\ 240 \leq \tilde{b}_1 \leq 310. \end{cases} \quad \begin{cases} \delta b_2 - ? \\ 20 + \delta b_2 \cdot 0 \geq 0, \\ 400 + \delta b_2 \cdot 2 \geq 0, \\ 480 + \delta b_2 \cdot 0 \geq 0, \\ 120 + \delta b_2 \cdot (-2) \geq 0, \\ -200 \leq \delta b_2 \leq 60 \Rightarrow \\ 0 \leq \tilde{b}_2 \leq 260. \end{cases}$$

Таким образом, пока отдельные колебания сырья будут находиться в найденных диапазонах, набор выгодных к выпуску видов продукции и характер дефицитности видов сырья будут сохраняться, однако оптимальные значения переменных будут меняться — их можно пересчитать по приведенным выше формулам.

е) Если изменение какого-либо запаса сырья нарушит найденный выше соответствующий диапазон или изменятся сразу несколько запасов, следует заменить в последней симплекс-таблице

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= 300 \cdot 2 + 250 \cdot 0 + 50 \cdot (-8) + 1200 \cdot 0 = 200, \\ \tilde{x}_3 &= 300 \cdot 0 + 250 \cdot 0 + 50 \cdot 0 + 1200 \cdot 0 = 500, \\ \tilde{x}_1 &= 300 \cdot 0 + 250 \cdot 0 + 50 \cdot 8 + 1200 \cdot 0 = 400, \\ \tilde{x}_8 &= 300 \cdot (-2) + 250 \cdot (-2) + 50 \cdot (-8) + 1200 \cdot 1 = -300 \end{aligned}$$

Ясно, что для реализации нового «оптимального» плана (оценки остались прежними — неотрицательными) не хватит 300 яиц, так что следует применить двойственный симплекс-метод [3] и избавиться от отрицательной базисной переменной.

В таблице 9 представлена оптимальная симплекс-таблица исходной модели (см. табл. 5) с новыми — пересчитанными — значениями базисных координат и целевой функции (выделены жирным шрифтом). Оптимальный план, соответствующий данной таблице, является недопустимым в силу отрицательности  $x_8 =$

д) Найдем в исходной модели пределы отдельных колебаний запасов сырья, в рамках которых сохраняется структура оптимального плана (состав базисных переменных — ассортимент выпускаемой продукции). Пусть  $\tilde{b}_i = b_i + \delta b_i$ , потребуем неотрицательности соответственно пересчитанных оптимальных базисных координат [3]:

$$\begin{cases} \delta b_3 - ? \\ 20 + \delta b_3 \cdot (-8) \geq 0, \\ 400 + \delta b_3 \cdot 0 \geq 0, \\ 480 + \delta b_3 \cdot 0 \geq 0, \\ 120 + \delta b_3 \cdot (-8) \geq 0, \\ -60 \leq \delta b_3 \leq 2,5 \Rightarrow \\ 0 \leq \tilde{b}_3 \leq 62,5. \end{cases} \quad \begin{cases} \delta b_4 - ? \\ 20 + \delta b_4 \cdot 0 \geq 0, \\ 400 + \delta b_4 \cdot 0 \geq 0, \\ 480 + \delta b_4 \cdot 0 \geq 0, \\ 120 + \delta b_4 \cdot 1 \geq 0, \\ -120 \leq \delta b_4 \Rightarrow \\ 1380 \leq \tilde{b}_4 \leq \infty. \end{cases}$$

значения базисных переменных (их легко вычислить, умножив матрицу из столбцов дополнительных сырьевых переменных оптимальной симплекс-таблицы на новый вектор запасов сырья) и дорешать задачу двойственным симплекс-методом [3], если появятся отрицательные координаты. Например, пусть новые запасы сырья равны 300 (мука 1-го сорта), 250 (мука 2-го сорта), 50 (маргарин), 1200 (яйца), тогда:

-300, следовательно, можно применить двойственный симплекс-метод, устраняющий отрицательные координаты при сохранении неотрицательности оценок. Пересчет таблиц в двойственном симплекс-методе производится точно так же, как в классическом симплекс-методе, дважды примененном в данной статье, а вот ведущий элемент выбирается иначе: сначала выбирается ведущая строка по отрицательной базисной координате, самой большой по модулю, а затем — ведущий столбец, который определяется наименьшим модулем отношения к отрицательным компонентам ведущей строки

соответствующих оценок (на языке табличной модели: не можешь выбрать ведущую строку — задача решена, а если не можешь выбрать ведущий столбец — задача не имеет решения вследствие неограниченности целевой функции). В

соответствии с данными правилами в таблице 9 ведущим элементом является  $-1$  в ведущей строке  $x_8$ , с его помощью вычислим таблицу 10.

Таблица 9. «Оптимальная» таблица симплекс-метода с недопустимым планом (варьирование запасов)

$x_{\text{баз}}$	$c_j$ $c_{\text{баз}}$	140	120	50	60	0	0	0	0	bi
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_2$	120	0	1	0	-1	2	0	-8	0	200
$x_3$	50	0	0	1	1	0	2	0	0	500
$x_1$	140	1	0	0	1	0	0	8	0	400
$x_8$	0	0	0	0	-1	-2	-2	-8	1	-300
$\Delta_j$		0	0	0	10	240	100	160	0	105000

В таблице 10 представлен новый оптимальный план для случая изменившихся запасов сырья  $x^* = (100, 500, 200, 300, 0, 0, 0, 0)$  с прибылью 102000, который может привлечь внимание менеджера как предпочтительный: производится вся линейка продукции, запасы сырья расходуются полностью, прибыль больше, чем в исходном варианте. Заметим, что для такого изменения стратегии

предприятия менеджеру не пришлось заново решать задачу линейного программирования, оказалось достаточным скорректировать последнюю симплекс-таблицу прежней модели с исходными параметрами и сразу найти новый оптимум.

Таблица 10. Оптимальная таблица двойственного симплекс-метода (варьирование запасов)

$x_{\text{баз}}$	$c_j$ $c_{\text{баз}}$	140	120	50	60	0	0	0	0	bi
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	
$x_2$	120	0	1	0	0	4	2	0	-1	500
$x_3$	50	0	0	1	0	-2	0	-8	1	200
$x_1$	140	1	0	0	0	-2	-2	0	1	100
$x_4$	60	0	0	0	1	2	2	8	-1	300
$\Delta_j$		0	0	0	0	220	80	80	10	102000

ж) Оценим выгодность выпуска нового вида хлебной продукции  $x_n$ , выпускаемой по

технологии  $A^n = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,125 \\ 2 \end{pmatrix}$  и обеспечивающей

прибыль  $c_n = 170$  руб. за 1 кг. Для этого не требуется перерешивать исходную задачу, добавив в нее новую переменную, достаточно включить ее в последнюю симплекс-таблицу исходной модели, пересчитав соответствующие изменившийся столбец  $\tilde{A}^n$  и оценку [3]. Если оценка нового продукта получится отрицательной, то сделаем вывод о его выгодности, т.к. таблица с дополнительной переменной утратила свойство оптимальности, появился ведущий столбец — новая переменная идет в базис нового оптимального плана. Оценка вычисляется как

$$\tilde{A}^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ -2 & -2 & -8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,125 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

В таблице 11 представлена скорректированная с учетом нового товара последняя симплекс-

разность скалярного произведения оптимального решения двойственной задачи (напомним, оно находится в последней строке оптимальной симплекс-таблицы исходной модели) на новый технологический сырьевой столбец и удельной прибыли нового продукта:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_n &= (y^*, A^n) - c_n \\ &= 240 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,25 + 160 \\ &\quad \cdot 0,125 + 0 \cdot 2 - 170 = -5 < 0. \end{aligned}$$

Отрицательная оценка свидетельствует, что выпуск такого нового хлеба выгоден, поэтому пересчитаем  $A^n$  (напомним, для этого достаточно умножить на новый сырьевой столбец матрицу, сформированную сырьевыми столбцами оптимальной симплекс-таблицы), внесем его в последнюю симплекс-таблицу и дорешаем задачу:

таблица исходной модели (добавления выделены жирным шрифтом).

Таблица 11. Симплекс-таблица с добавленной новой переменной

	140	120	50	60	0	0	0	0	170	bi

$x_{\text{баз}}$	$c_j$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_n$	
	$c_{\text{баз}}$										
$x_2$	120	0	1	0	-1	2	0	-8	0	0	20
$x_3$	50	0	0	1	1	0	2	0	0	0,5	400
$x_1$	140	1	0	0	1	0	0	8	0	1	480
$x_8$	0	0	0	0	-1	-2	-2	-8	1	-0,5	120
$\Delta_j$		0	0	0	10	240	100	160	0	-5	89600

По правилам классического симплекс-метода определяем в таблице 11 ведущий элемент 1 в ведущем столбце  $x_n$  (новый хлеб идет в план вместо традиционного хлеба первого вида) и

пересчитываем симплекс-таблицу (результаты представлены в таблице 12).

Таблица 12. Оптимальная симплекс-таблица с добавленной новой переменной

$x_{\text{баз}}$	$c_j$	140	120	50	60	0	0	0	0	170	bi
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_n$	
$x_2$	120	0	1	0	-1	2	0	-8	0	0	20
$x_3$	50	-0,5	0	1	0,5	0	2	-4	0	0	160
$x_n$	170	1	0	0	1	0	0	8	0	1	480
$x_8$	0	0,5	0	0	-0,5	-2	-2	-4	1	0	360
$\Delta_j$		5	0	0	15	240	100	200	0	0	92000

Новый оптимальный план по-прежнему содержит три вида выпускаемой продукции (теперь уже из пяти возможных) и остатки запаса яиц:  $x^* = (0, 20, 160, 0, 0, 0, 0, 360, 480)$ , здесь новая переменная занимает последнее место в векторе. Максимальная прибыль с учетом нового товара равна 92000.

Ситуация схожа с предыдущими исследованиями — нам не пришлось перерешивать задачу, оказалось возможным, применяя свойства пары взаимно-двойственных задач, просто скорректировать последнюю таблицу исходной модели и сразу перейти к новому плану. Конечно, данное преимущество при наличии персонального компьютера с программным обеспечением для решения задач линейного программирования не кажется существенным, однако для менеджера, решающего проблему на листке бумаги, оно будет экономить много сил, так как не нужно повторно проводить многие расчеты.

Заметим, что, если бы оценка  $\tilde{\Delta}_n$  получилась положительной, то мы признали бы выпуск нового товара невыгодным (скорректированная С-таблица осталась бы оптимальной). При нулевой оценке в задаче возникает пара оптимальных планов с одинаковой прибылью — прежний и новый, с участием нового продукта (столбец свободной переменной с нулевой оценкой нужно назначить ведущим). В нашем случае это произошло бы при прибыли от единицы нового товара в 165 руб. — оба варианта оптимальны с прибылью 89600 руб.

Перейдем к выводам.

Использование стандартного программного обеспечения или облачных инструментов не может заменить аналитической работы с параметрами

оптимальных симплекс-таблиц, формулами постоптимального анализа — доступные любому менеджеру технологии продемонстрированы в данной статье. При решении важнейших проблем реинжиниринга бизнеса не стоит доверяться и генеративным нейросетям: системное мышление дает управленцу полную картину экономической ситуации. ■

1. Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: учебное пособие. — М.: Издательство «Дело» АНХ, 2008. 664 с.

2. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие. — СПб: Питер, 2010. 496 с.

3. Тятюшкин А.И., Деренко Н.В. Решение и анализ задач линейного программирования. Иркутск: Изд-во ИГЭА, 1996. 48 с.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: учебное пособие. — М.: Издательство «Дело» АНХ, 2008. 664 с.

Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие. — СПб: Питер, 2010. 496 с.

Тятюшкин А.И., Деренко Н.В. Решение и анализ задач линейного программирования. Иркутск: Изд-во ИГЭА, 1996. 48 с.

## **Post-optimal parametric analysis of a linear programming problem in business reengineering**

© **Derenko N., 2026**

In this article, the author demonstrates the technology of solving and post-optimal parametric analysis of a linear programming problem. The ability to assess the sustainability of an optimal plan with varying prices and

resource reserves, identify the most valuable resources, and assess the feasibility of releasing new products or introducing new technologies are the most important tools for business reengineering. The result is a conclusion: the use of standard software or cloud-based tools cannot replace analytical work with the parameters of optimal simplex tables, formulas for post-optimal analysis.

*Keywords:* linear programming, production planning, business reengineering, post-optimal parametric analysis, stability of the optimal plan

---